Pratique du boulier chinois

Baptiste GORIN

Les premières traces écrites concernant le boulier chinois remontent au XIV-ième siècle.
Bien que les calculatrices et les ordinateurs soient omniprésents de nos jours, le boulier reste toujours en usage dans de nombreux pays asiatiques, en particulier en république populaire de Chine.
Au Japon, empire de l'électronique, la maîtrise du boulier japonais est considérée comme un acquis indispensable.

La vitesse de frappe de quiconque sur une une calculatrice ne saurait rivaliser face à la dextérité d'un expert en boulier.
Comme pour illustrer ce fait, en novembre 1945, au sortir de la seconde guerre mondiale, un match censé démontrer la supériorité de l'occident a finalement vu le boulier triompher de la machine électrique : dans cet affrontement en cinq manches, le japonais Kiyoshi Matsuzaki, champion de soroban du bureau de l'épargne du ministère de l'administration des postes, l'emporta 4 à 1 face à l'américain Thomas Nathan Woods, soldat de deuxième classe de la 240-ième section financière du quartier général des forces US au JApon, désigné comme « l'opérateur de calculatrice électrique le plus expert de l'armée américaine au Japon ».

Le boulier permet non seulement d'effectuer les opérations usuelles (addition, soustraction, multiplication, division) mais également d'extraire la racine carrée et la racine cubique d'un nombre.

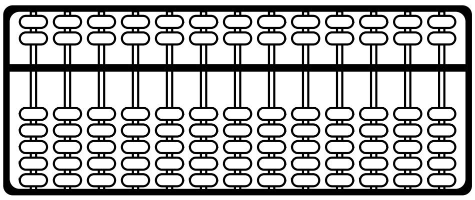
Cette note présente les différentes techniques opératoires :

I. Présentation du boulier

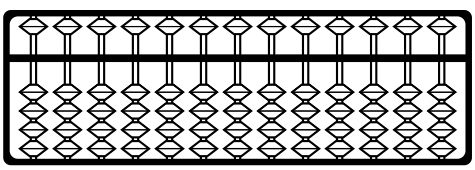
Un boulier se présente sous la forme d'un cadre rectangulaire (généralement en bois).
Parallèlement aux petits côtés, des tiges portent des boules.
Chaque tige correspond à un ordre décimal, étant entendu qu'une tige a une valeur dix fois supérieure à celle immédiatement à sa droite.
Il existe plusieurs plusieurs types d'abaques :
- le boulier chinois ou *suan-pan* (littéralement « planchette à calcul ») ;
- le boulier japonais ou *soroban* ;
- le boulier russe ou *stchoty* (ou encore *schioty*).

Les noms donnés au boulier dans les autres pays sont *leo-kid* (littéralement « boules à penser ») en Thaïlande, *soo-pan* dans le sud de la Chine, *choreb* en Arménie et en Iran, *coulba* en Turquie.

Le suan-pan et le soroban sont tous deux divisés en deux par une barre transversale perpendiculaires aux petits côtés.
Chaque tige du suan-pan comporte deux boules dans la partie supérieure et cinq boules dans la partie inférieure.

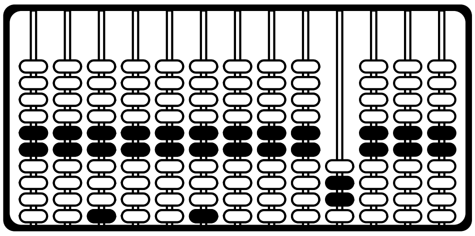


Chaque tige du soroban comporte une boule dans la partie supérieure et quatre boules dans la partie inférieure.



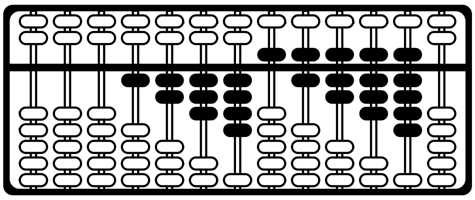
Précisons que le soroban d'avant guerre comportait cinq boules sur chaque tige dans la partie inférieure.
Notons de plus que les boules du du suan-pan sont arrondies alors que celles du soroban sont lenticulaires, permettant une plus grande rapidité et précision d'exécution.

Chaque tige (sauf une) du stchoty comporte dix boules dont deux (la cinquième et la sixième) sont de couleur noire afin de pouvoir distinguer facilement les nombres de 1 à 10.
Les rangées qui possèdent trois boules noires indiquent les unités de mille et les unités de millions.
Enfin, la tige qui comporte quatre boules permet d'une part de séparer les parties entière et décimale, et d'autre part de compter en quart de rouble.



II. Écriture

On active (resp. on désactive) une boule si on l'approche (resp. on l'éloigne) de la barre transversale.
Quand toutes les boules sont désactivées, le boulier est en position neutre.
Les boules inférieures (situées au-dessous de la barre transversale) sont appelées unaires, les boules supérieures (situées au-dessus de la barre transversale) quinaires.
Une unaire représente une puissance de 10 ; une quinaire représente une puissance de 10 multipliée par 5.
On appellera décadaire 10 unaires.
Ainsi, cinq unaires valent une quinaire et deux quinaires valent une décadaire. Les nombres s'écrivent de gauche à droite.
Sur un suan-pan, le nombre 1234567890 se pose ainsi :



Dans la suite de cette note, on travaillera uniquement sur le suan-pan, le lecteur se convaincra aisément que les techniques présentées s'adaptent sans grande difficulté au soroban.
Par ailleurs, sur les figures, les boules activées seront noircies.

III. Addition

Afin de combiner les boules de la base cinq (quinaires) avec celle de la base dix (unaires et décadaires), on applique quatre règles afin d'additionner efficacement deux chiffres.

Règle 1 (ajout d'unaire(s) et/ou de quinaire). — Il s'agit du cas le plus simple de l'addition.

Nombre donné	Auquel on ajoute	Unaires	Quinaire
0,1,2,3,4,5,6,7 ou 8	1	+1	
0,1,2,5,6 ou 7	2	+2	
0,1,5 ou 6	3	+3	
0 ou 5	4	+4	
0,1,2,3 ou 4	5		+1
0,1,2 ou 3	6	+1	+1
0,1 ou 2	7	+2	+1
0 ou 1	8	+3	+1
0	9	+4	+1

Règle 2 (ajout de quinaire, retrait d'unaire(s)). — Ce cas se produit lorsque le résultat de l'addition est supérieur (ou égal) à 5 et inférieur (strictement) à 10 alors que le nombre donné est inférieur (ou égal) à 4.

Nombre donné	Auquel on ajoute	Formule	Unaires	Quinaire
4	1	$+1 = +5 - 4$	-4	$+1$
3 ou 4	2	$+2 = +5 - 3$	-3	$+1$
2,3 ou 4	3	$+3 = +5 - 2$	-2	$+1$
1,2,3 ou 4	4	$+4 = +5 - 1$	-1	$+1$

Règle 3 (ajout de décadaire, retrait d'unaire(s) et/ou de quinaire). — Ce cas se produit lorsque le résultat de l'addition est supérieur (ou égal) à 10 (premier cas).

Nombre donné	Auquel on ajoute	Formule	Unaires	Quinaire	Décadaire
9	1	$+1 = +10 - 5 - 1$	-4	-1	$+1$
8 ou 9	2	$+2 = +10 - 5 - 3$	-3	-1	$+1$
7,8 ou 9	3	$+3 = +10 - 5 - 2$	-2	-1	$+1$
6,7,8 ou 9	4	$+4 = +10 - 5 - 1$	-1	-1	$+1$
5,6,7,8 ou 9	5	$+5 = +10 - 5$		-1	$+1$
4 ou 9	6	$+6 = +10 - 4$	-4		$+1$
3,4,8 ou 9	7	$+7 = +10 - 3$	-3		$+1$
2,3,4,7,8 ou 9	8	$+8 = +10 - 2$	-2		$+1$
1,2,3,4,6,7,8 ou 9	9	$+9 = +10 - 1$	-1		$+1$

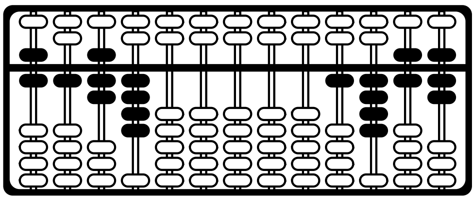
Règle 4 (ajout de décadaire et d'unaire(s), retrait de quinaire). — Ce cas se produit lorsque le résultat de l'addition est supérieur (ou égal) à 10 (second cas).

Nombre donné	Auquel on ajoute	Formule	Unaires	Quinaire	Décadaire
5,6,7 ou 8	6	$+6 = +10 - 5 + 1$	$+1$	-1	$+1$
5,6 ou 7	7	$+7 = +10 - 5 + 2$	$+2$	-1	$+1$
5 ou 6	8	$+8 = +10 - 5 + 3$	$+3$	-1	$+1$
5	9	$+9 = +10 - 5 + 4$	$+4$	-1	$+1$

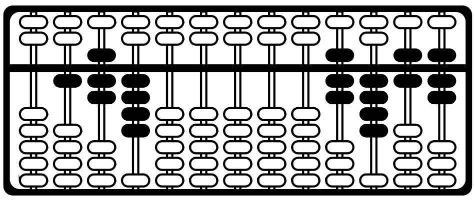
On pose, à droite du boulier, le premier terme de l'addition. On ajoute le terme suivant en effectuant les opérations sur chaque chiffre suivant les puissances décroissantes ; autrement dit, l'opération s'effectue de la gauche vers la droite.

Pour une meilleure lisibilité, on posera le second terme de l'addition à gauche du boulier et on désactivera les boules à chaque opération effectuée.

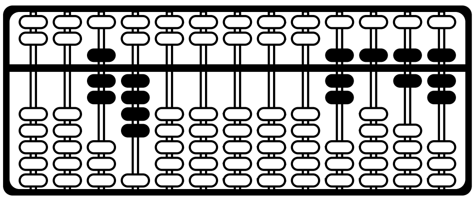
Exemple. — Effectuons $1467 + 6174$:



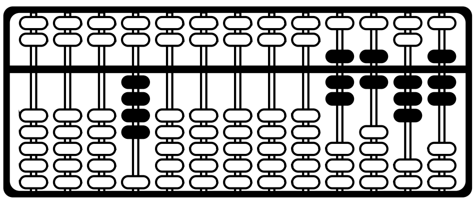
$1467 + 6174$



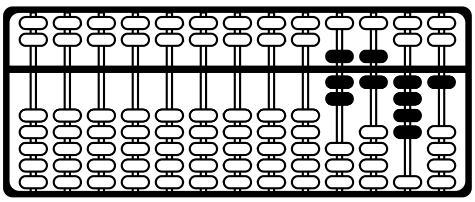
$1 + 6$ (règle 1)



$4 + 1 = 4 + 5 - 4$ (règle 2)



$6 + 7 = 6 + 10 - 5 + 2$ (règle 4)



$7 + 4 = 7 + 10 - 5 - 1$ (règle 3)

Ainsi $1467 + 6174 = 7641$.

IV. Soustraction

Tout comme pour l'addition, afin de combiner les boules de la base cinq (quinaires) avec celle de la base dix (unaires et décadaires), on applique quatre règles afin de soustraire efficacement deux chiffres.

Règle 1 (retrait d'unaire(s) et/ou de quinaire). — Il s'agit du cas le plus simple de la soustraction.

Nombre donné	Auquel on soustrait	Unaires	Quinaire
1,2,3,4,5,6,7,8 ou 9	1	-1	
2,3,4,7,8 ou 9	2	-2	
3,4,8 ou 9	3	-3	
4 ou 9	4	-4	
5,6,7,8 ou 9	5		-1
6,7,8 ou 9	6	-1	-1
7,8 ou 9	7	-2	-1
8 ou 9	8	-3	-1
9	9	-4	-1

Règle 2 (ajout d'unaire(s) et retrait de quinaire). — Ce cas se produit lorsque le résultat de la soustraction est inférieur (strictement) à 5 alors que le nombre donné est supérieur (ou égal) à 5.

Nombre donné	Auquel on soustrait	Formule	Unaires	Quinaire
5	1	$-1 = -5 + 4$	$+4$	-1
5 ou 6	2	$-2 = -5 + 3$	$+3$	-1
5,6 ou 7	3	$-3 = -5 + 2$	$+2$	-1
5,6,7 ou 8	4	$-4 = -5 + 1$	$+1$	-1

Règle 3 (ajout d'unaire(s) et/ou quinaire, retrait de décadaire). — Ce cas se produit lorsque, à un nombre donné, on soustrait un nombre strictement supérieur (premier cas).

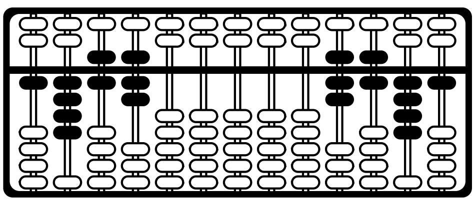
Nombre donné	Auquel on ajoute	Formule	Unaires	Quinaire	Décadaire
0	1	$-1 = -10 + 5 + 4$	$+4$	$+1$	-1
0 ou 1	2	$-2 = -10 + 5 + 3$	$+3$	$+1$	-1
0,1 ou 2	3	$-3 = -10 + 5 + 2$	$+2$	$+1$	-1
0,1,2 ou 3	4	$-4 = -10 + 5 + 1$	$+1$	$+1$	-1
0,1,2,3 ou 4	5	$-5 = -10 + 5$		$+1$	-1
0 ou 5	6	$-6 = -10 + 4$	$+4$		-1
1,2,5 ou 6	7	$-7 = -10 + 3$	$+3$		-1
0,1,2,5,6 ou 7	8	$-8 = -10 + 2$	$+2$		-1
0,1,2,3,5,6,7 ou 8	9	$-9 = -10 + 1$	$+1$		-1

Règle 4 (ajout de quinaire, retrait d'unaire(s) et décadaire). — Ce cas se produit lorsque, à un nombre donné, on soustrait un nombre strictement supérieur (second cas).

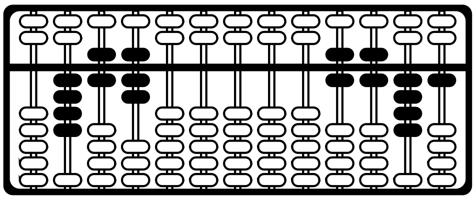
Nombre donné	Auquel on ajoute	Formule	Unaires	Quinaire	Décadaire
1,2,3 ou 4	6	$-6 = -10 + 5 - 1$	-1	$+1$	-1
2,3 ou 4	7	$-7 = -10 + 5 - 2$	-2	$+1$	-1
3 ou 4	8	$-8 = -10 + 5 - 3$	-3	$+1$	-1
4	9	$-9 = -10 + 5 - 4$	-4	$+1$	-1

On pose, à droite du boulier, le premier terme de la soustraction (en vérifiant qu'il s'agit du plus élevé). On retranche le terme suivant en effectuant les opérations sur chaque chiffre suivant les puissances décroissantes ; autrement dit, l'opération s'effectue de la gauche vers la droite.

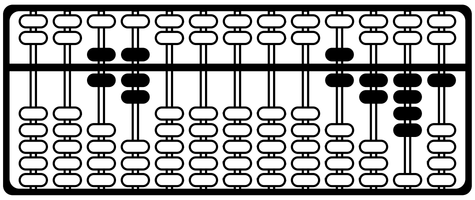
Exemple. — Effectuons $7641 - 1467$:



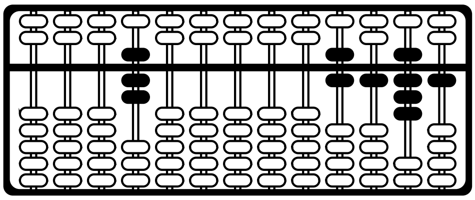
$7641 - 1467$



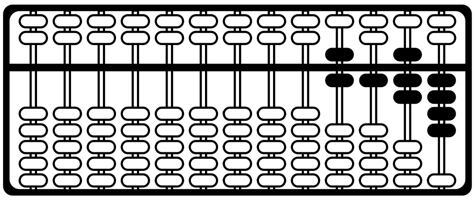
7 − 1 (règle 1)



$6-4=6-5+1$ (règle 2)



$4-6=4-10+5-1$ (règle 4)



$1-7=1-10+3$ (règle 3)

Ainsi $7641-1467=6174$.

V. Multiplication

Rappelons que si on multiplie un nombre a par un nombre b, a est le multiplicande et b le multiplicateur.
Nous allons voir deux méthodes semblables basées sur la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, seul l'ordre dans lequel sont effectuées les opérations étant différent.

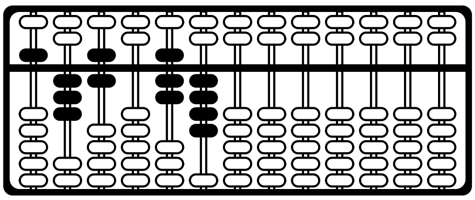
V.1 Méthode chinoise

On pose, à gauche du boulier, le multiplicande et, à sa droite, le multiplicateur, en laissant une rangée libre entre les deux.
Il doit y avoir à droite du boulier au moins autant de rangées libres que le nombre de chiffres du multiplicateur.
On multiplie chaque chiffre du multiplicateur (dans l'ordre croissant des puissances) par chaque chiffre du multiplicande (dans l'ordre croissant des puissances).
À chaque fois que l'on a multiplié un chiffre du multiplicateur par tous les chiffres du multiplicande, on efface ce chiffre en désactivant les boules correspondantes.

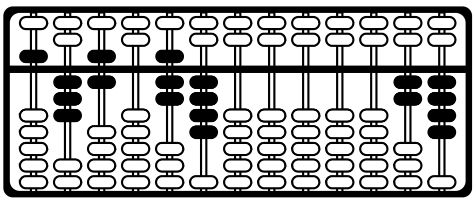
Exemple. — Effectuons 536×74. L'ordre successif des opérations est :

			5	3	6
	×			7	4
$4\times 6=24$				2	4
$4\times 30=120$			1	2	
$4\times 500=2000$		2	0		
$70\times 6=420$			4	2	
$70\times 30=2100$		2	1		
$70\times 500=35000$	3	5			
	3	9	6	6	4

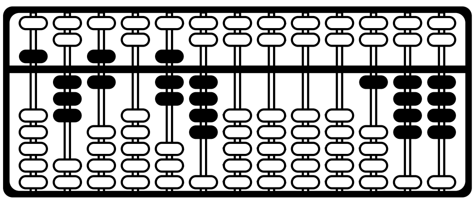
Soit :



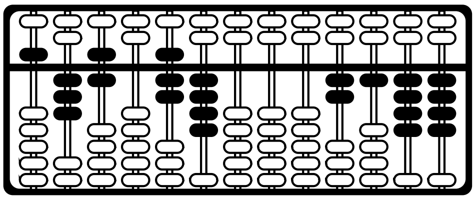
536×74



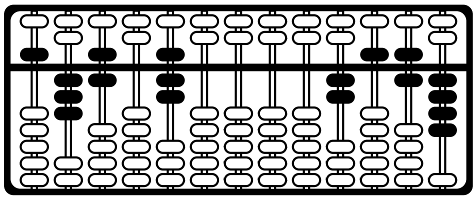
$+4\times 6$



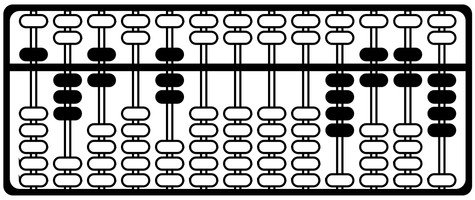
$+4\times 30$



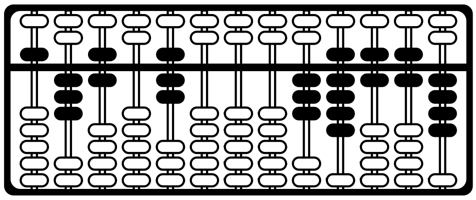
+4 × 500



+70 × 6



+70 × 30



+70 × 500

V.2 Méthode japonaise

On pose, à gauche du boulier, le multiplicateur et, à sa droite, le multiplicande, en laissant une rangée libre entre les deux.

Il doit y avoir à droite du boulier au moins autant de rangées libres que le nombre de chiffres du multiplicande.

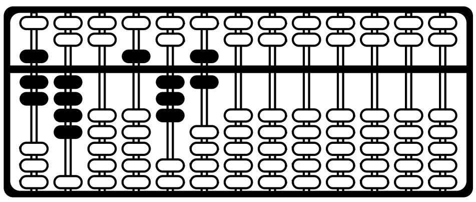
On multiplie chaque chiffre du multiplicande (dans l'ordre croissant des puissances) par chaque chiffre du multiplicateur (dans l'ordre décroissant des puissances).

À chaque fois que l'on a multiplié un chiffre du multiplicande par tous les chiffres du multiplicateur, on efface ce chiffre en désactivant les boules correspondantes.

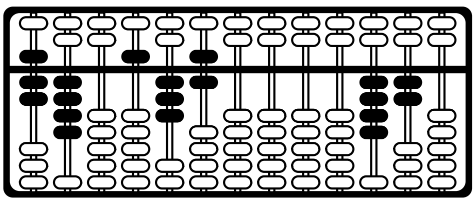
Exemple. — Effectuons 536 × 74. L'ordre successif des opérations est :

			5	3	6
	×			7	4
$6 \times 70 = 420$			4	2	
$6 \times 4 = 24$				2	4
$30 \times 70 = 2100$		2	1		
$30 \times 4 = 120$			1	2	
$500 \times 70 = 35000$	3	5			
$500 \times 4 = 2000$		2	0		
	3	9	6	6	4

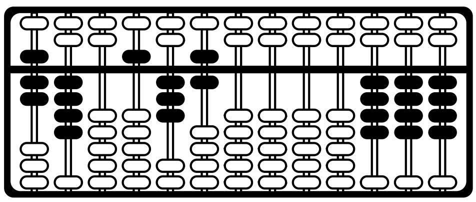
Soit :



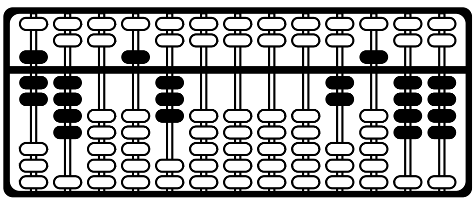
536 × 74



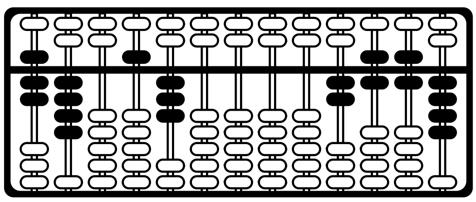
+6 × 70



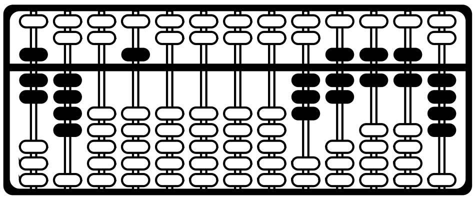
+6 × 4



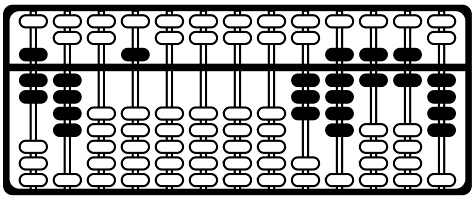
+30 × 70



+30 × 4



$+500 \times 70$



$+500 \times 4$

VI. Division

On pose le diviseur à gauche du boulier et le dividende à droite.

VI.1 Diviseur à un chiffre

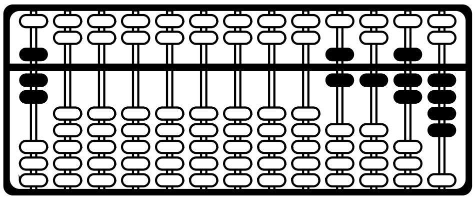
Première méthode

La division s'effectue en considérant chaque chiffre du dividende selon les puissances décroissantes. Posant a le chiffre considéré au dividende et b le diviseur, le principe de la division euclidienne invite à énoncer les deux règles suivantes :

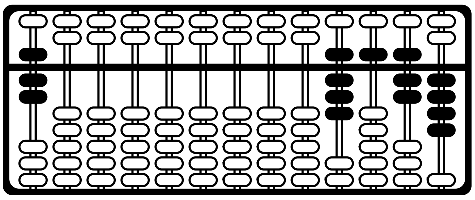
Règle 1. — si a est supérieur ou égal à b, alors on place, à gauche de a, le quotient entier de la division de a par b, le reste occupant la colonne de a ;
Règle 2. — si a est inférieur (strictement) à b, alors on place, sur la colonne de a, le quotient entier de la division de $10a$ par b, le reste s'ajoutant à la colonne de droite.

Le quotient entier apparaîtra, décalé d'une colonne sur la gauche, la dernière colonne à droite indiquant le reste.

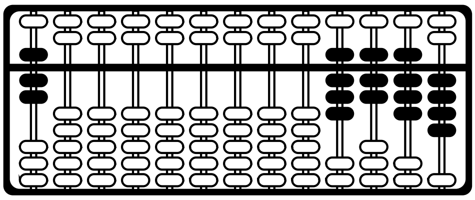
Exemple. — Effectuons $6174 \div 7$:



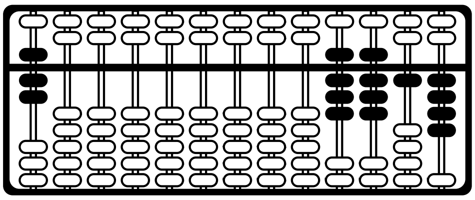
$6174 \div 7$



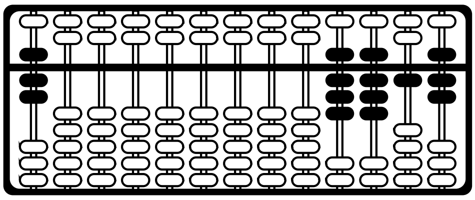
$6 \div 7 \Longrightarrow 60 \div 7 = 8$ reste 4 (règle 2)



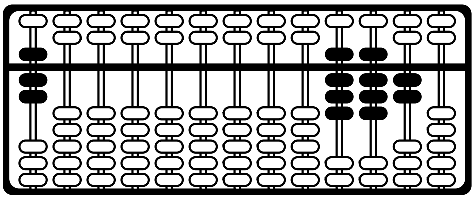
$5 \div 7 \Longrightarrow 50 \div 7 = 7$ reste 1 (règle 2)



$8 \div 7 = 1$ reste 1 (règle 1)



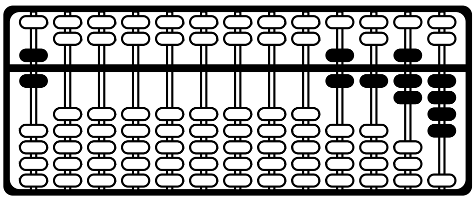
$1 \div 7 \Longrightarrow 10 \div 7 = 1$ reste 3 (règle 2)



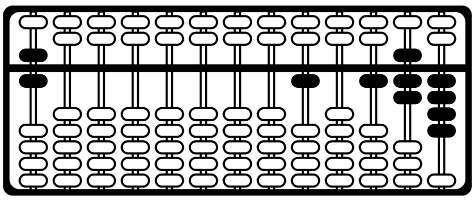
$7 \div 7 = 1$ reste 0 (règle 1)

Ainsi $6174 \div 7 = 882$ reste 0.

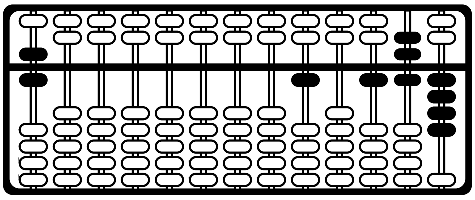
Exemple. — Effectuons $6174 \div 6$:



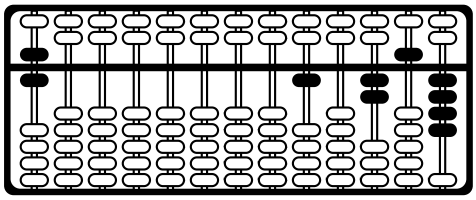
$6174 \div 6$



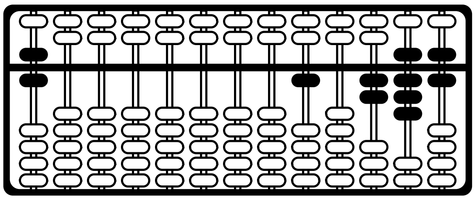
$6 \div 6 = 1$ reste 0 (règle 1)



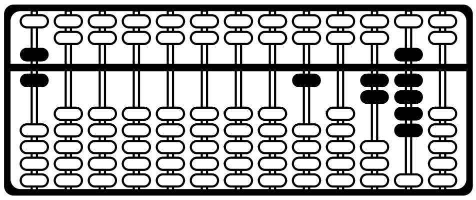
$1 \div 6 \Longrightarrow 10 \div 6 = 1$ reste 4 (règle 2)



$11 \div 6 = 1$ reste 5 (règle 1)



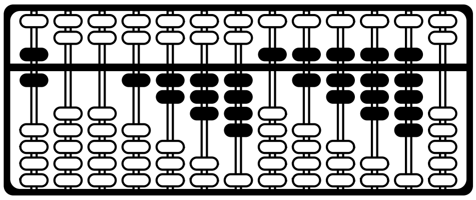
$5 \div 6 \Longrightarrow 50 \div 6 = 8$ reste 2 (règle 2)



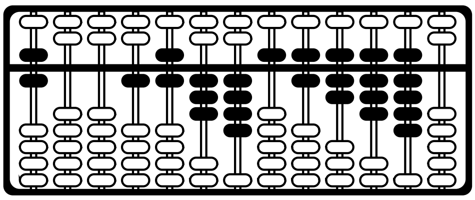
$6 \div 6 = 1$ reste 0 (règle 1)

Ainsi $6174 \div 6 = 1029$ reste 0.

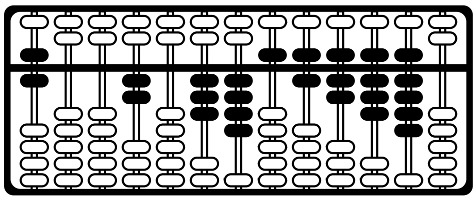
Exemple. — Effectuons $1234567890 \div 6$:



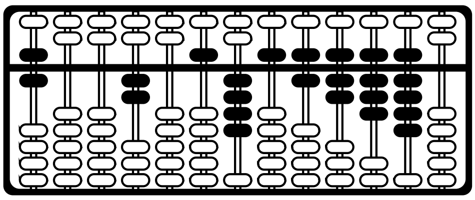
$1234567890 \div 6$



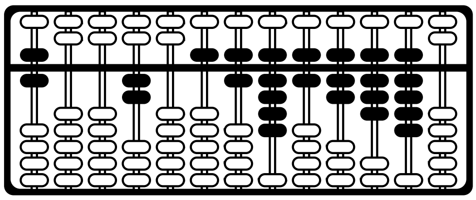
$1 \div 6 \Longrightarrow 10 \div 6 = 1$ reste 4 (règle 2)



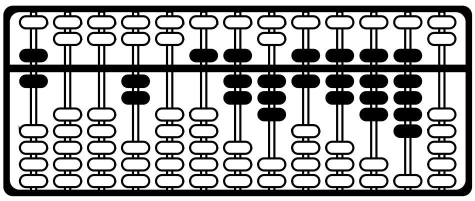
$6 \div 6 = 1$ reste 0 (règle 1)



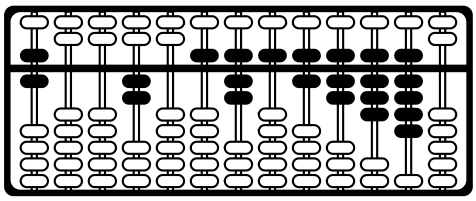
$3 \div 6 \Longrightarrow 30 \div 6 = 5$ reste 0 (règle 2)



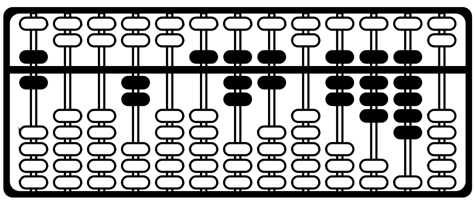
$4 \div 6 \Longrightarrow 40 \div 6 = 6$ reste 4 (règle 2)



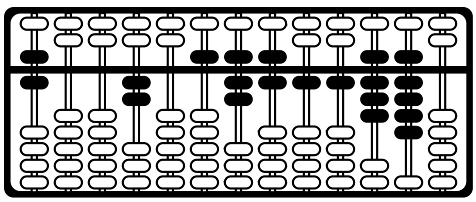
$9 \div 6 = 1$ reste 3 (règle 1)



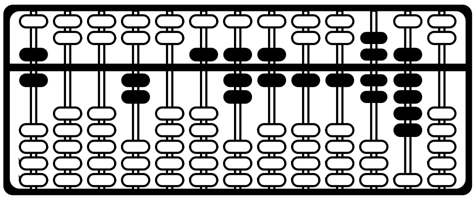
$3 \div 6 \Longrightarrow 30 \div 6 = 5$ reste 0 (règle 2)



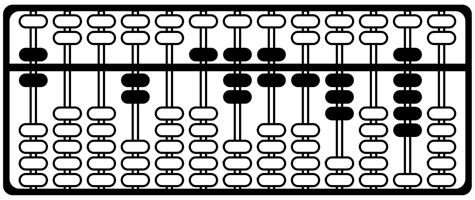
$6 \div 6 = 1$ reste 0 (règle 1)



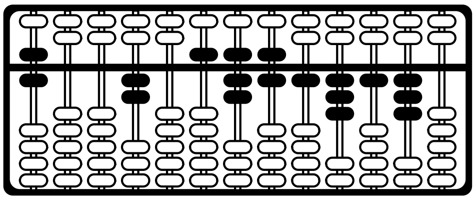
$7 \div 6 = 1$ reste 1 (règle 1)



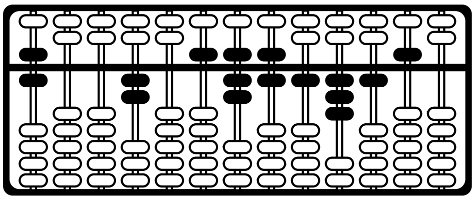
$1 \div 6 \Longrightarrow 10 \div 6 = 1$ reste 4 (règle 2)



$12 \div 6 = 2$ reste 0 (règle 1)



$9 \div 6 = 1$ reste 3 (règle 1)



$3 \div 6 \Longrightarrow 30 \div 6 = 5$ reste 0 (règle 2)

Ainsi $1234567890 \div 6 = 205761315$

Deuxième méthode

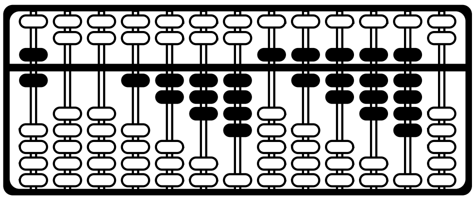
La division s'effectue classiquement en considérant les chiffres du dividende selon les puissances décroissantes. Posant a_1 et a_2 les chiffres considérés au dividende et b le diviseur, les deux règles suivantes permettent de placer les chiffres du quotient :

Règle 1. — si a_1 est supérieur ou égal à b, alors on place, deux colonnes à gauche de a_1, le quotient entier $q = E\left(\frac{a_1}{b}\right)$ de la division de a_1 par b, puis on retranche qb de a_1 ;

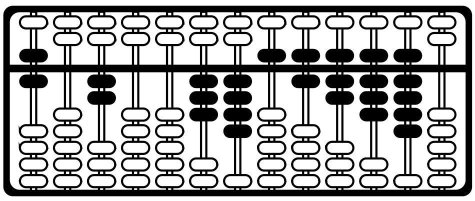
Règle 2. — si a_1 est inférieur (strictement) à b, alors on place, une colonne à gauche de a_1, le quotient entier $q = E\left(\frac{10a_1 + a_2}{b}\right)$ de la division de $10a_1 + a_2$ par b, puis on retranche qb de $10a_1 + a_2$.

Le quotient entier apparaîtra, décalé de deux colonnes sur la gauche, la dernière colonne à droite indiquant le reste.

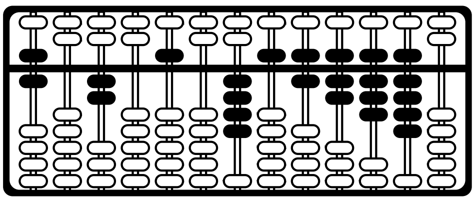
Exemple. — Effectuons $1234567890 \div 6$:



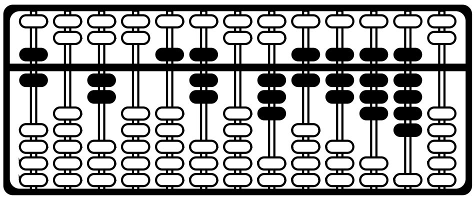
$1234567890 \div 6$



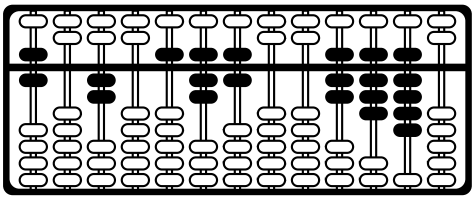
$E\left(\frac{12}{6}\right) = 2, 12 - 6 \times 2$ (règle 2)



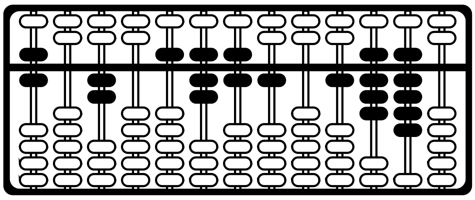
$E\left(\frac{34}{6}\right) = 5, 34 - 6 \times 5$ (règle 2)



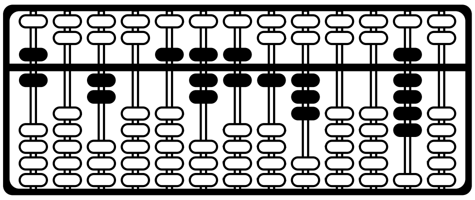
$E\left(\frac{45}{6}\right) = 7, 45 - 6 \times 7$ (règle 2)



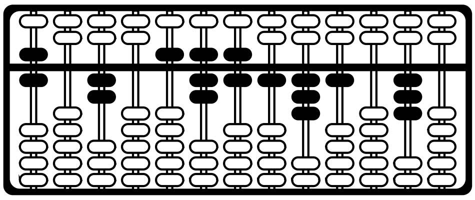
$E\left(\frac{36}{6}\right) = 6, 36 - 6 \times 6$ (règle 2)



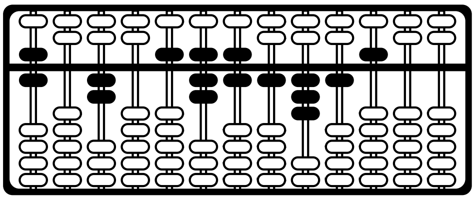
$E\left(\dfrac{7}{6}\right) = 1, 7 - 6 \times 1$ (règle 1)



$E\left(\dfrac{18}{6}\right) = 3, 18 - 6 \times 3$ (règle 2)



$E\left(\dfrac{9}{6}\right) = 1, 18 - 6 \times 1$ (règle 2)



$E\left(\dfrac{30}{6}\right) = 5, 30 - 6 \times 5$ (règle 2)

Ainsi $1234567890 \div 6 = 205761315$

VI.2 Diviseur quelconque

Lorsque le diviseur est quelconque, il existe différentes techniques, chacune d'elles proposant d'aboutir au quotient par approximations successives.
Il convient alors de corriger éventuellement, par excès ou par défaut, l'approximation trouvée à chaque étape.

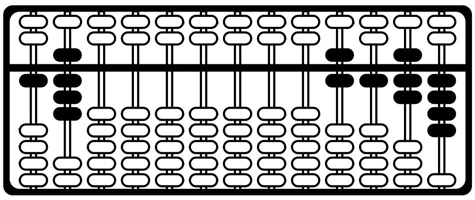
À défaut d'être efficace, la méthode exposée présente l'avantage de minimiser les erreurs et les calculs fastidieux (avec les multiplications principalement).

La division s'effectue en considérant chaque chiffre du dividende avec le premier chiffre du diviseur.
Posant a le (premier) chiffre considéré au dividende et b le premier chiffre du diviseur, le chiffre q du quotient approché se place deux colonnes à gauche du dividende et est égal à :

$$q = \begin{cases} E\left(\dfrac{10a}{b}\right) & \text{si} \quad a < b \\ E\left(\dfrac{10a}{b+1}\right) & \text{si} \quad a = b \\ E\left(\dfrac{a}{b+1}\right) & \text{si} \quad a > b \end{cases}$$

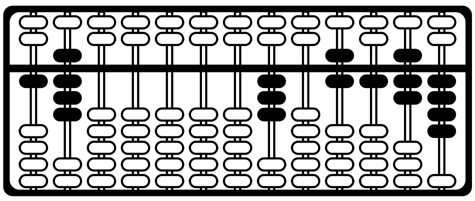
Ensuite, on retranche de la partie du dividende considéré q fois le diviseur.
Si le reste obtenu est supérieur au diviseur ou si la soustraction est impossible, il convient alors de corriger le quotient approché.

Exemple. — Effectuons $6174 \div 18$:

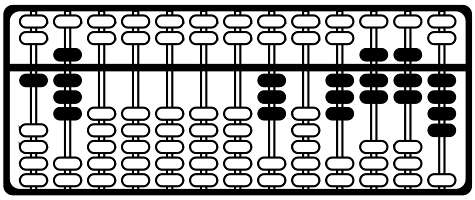


$6174 \div 18$

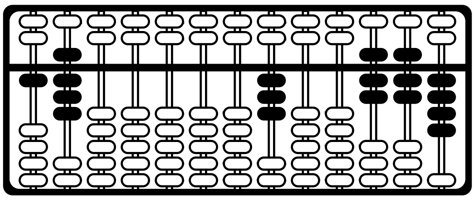
Comme $E\left(\dfrac{6}{2}\right) = 3$, posons 3 au quotient provisoire :



et retranchons 3×8 puis 3×10 de 61 :

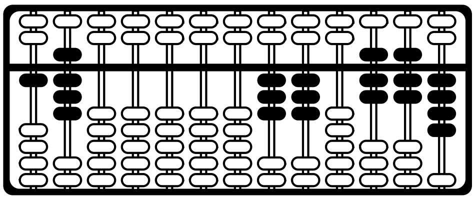


$61 - 3 \times 8 = 37$

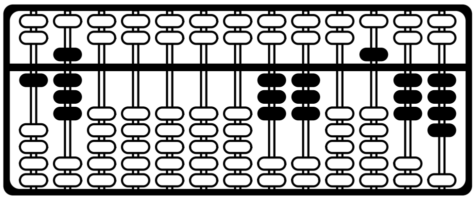


$37 - 3 \times 10 = 7$

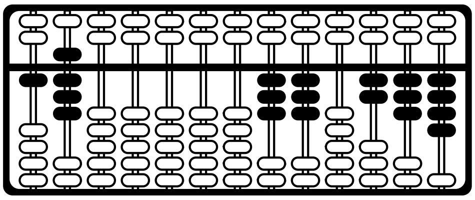
Comme $E\left(\frac{7}{2}\right) = 3$, posons 3 au quotient provisoire :



et retranchons 3×8 puis 3×10 de 77 :

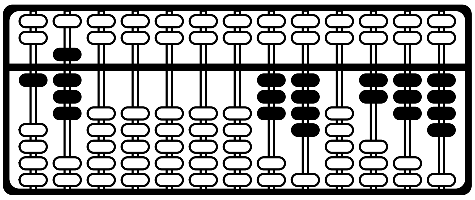


$77 - 3 \times 8 = 53$

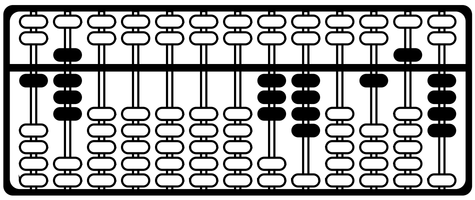


$53 - 3 \times 10 = 23$

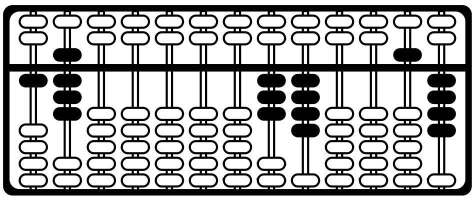
Le reste 23 est supérieur au diviseur, on peut donc augmenter le quotient provisoire de $E\left(\frac{2}{2}\right) = 1$:



et retranchons 1×8 puis $1{\times}10$ de 23 :

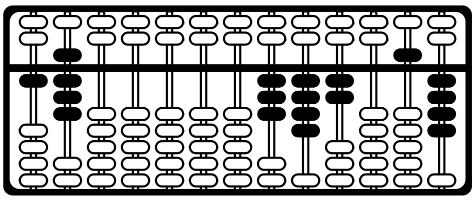


$23 - 1 \times 8 = 16$

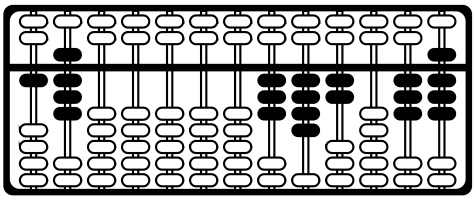


$15 - 1 \times 10 = 5$

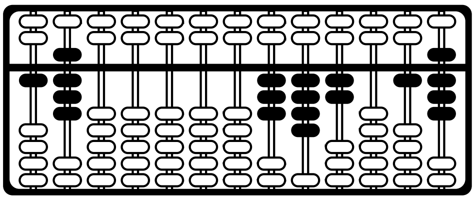
Comme $E\left(\frac{5}{2}\right) = 2$, posons 2 au quotient provisoire :



et retranchons 2×8 puis 2×10 de 54 :

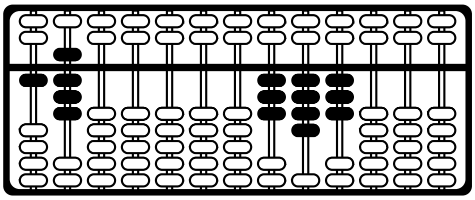


$54 - 2 \times 8 = 38$



$38 - 2 \times 10 = 18$

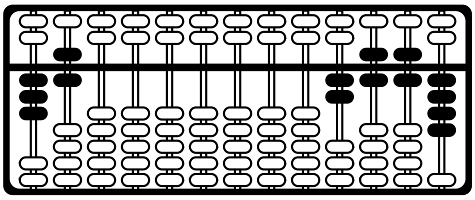
Le reste 18 est égal au diviseur, on peut donc augmenter le quotient provisoire de 1 et retrancher 18 du reste :



$18 - 1 \times 18 = 0$

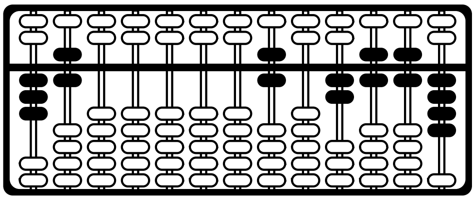
Ainsi $6174 \div 18 = 343$.

Exemple. — Effectuons $2664 \div 36$.

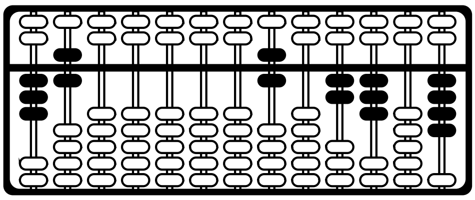


$2664 \div 36$

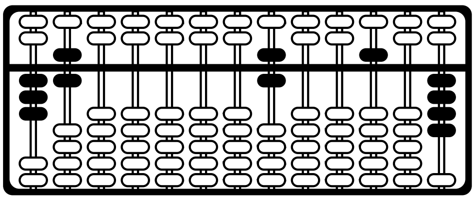
Comme $E\left(\frac{20}{3}\right) = 6$, posons 6 au quotient provisoire :



et retranchons 6×6 puis 6×30 de 266 :

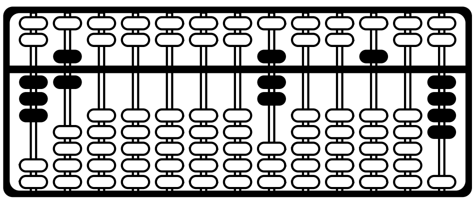


$266 - 6 \times 6 = 230$



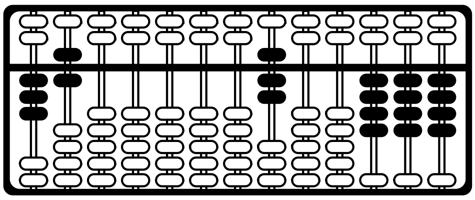
$230 - 6 \times 30 = 50$

Le reste 50 est supérieur au diviseur, on peut donc augmenter le quotient provisoire de $E\left(\frac{5}{4}\right) = 1$:

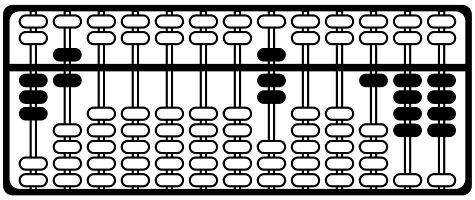


$230 - 6 \times 30 = 50$

et retranchons 1×6 puis 1×30 de 50 :

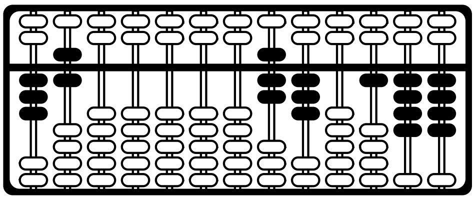


$50 - 1 \times 6 = 44$

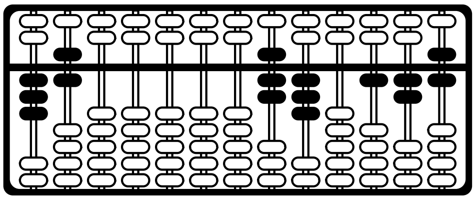


$44 - 1 \times 30 = 14$

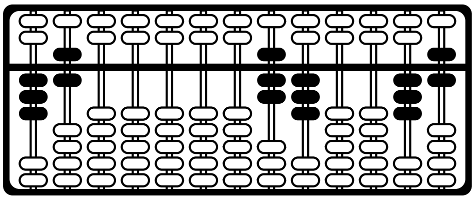
Comme $E\left(\dfrac{10}{3}\right) = 3$, posons 3 au quotient provisoire :



et retranchons 3×6 puis 3×30 de 144 :

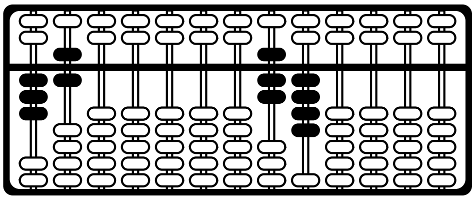


$144 - 3 \times 6 = 126$



$126 - 3 \times 30 = 36$

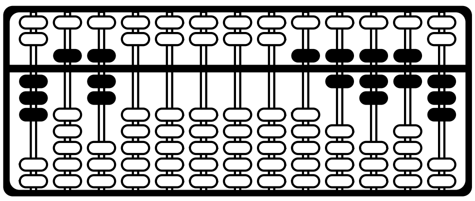
Le reste 36 est égal au diviseur, on peut donc augmenter le quotient provisoire de 1 et retrancher 36 du reste :



$36 - 1 \times 36 = 0$

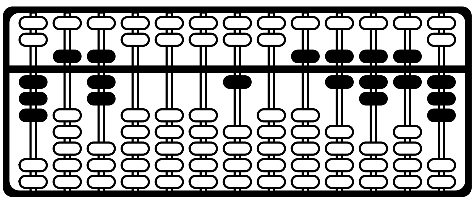
Ainsi $2664 \div 36 = 74$.

Exemple. — Effectuons $56763 \div 357$:

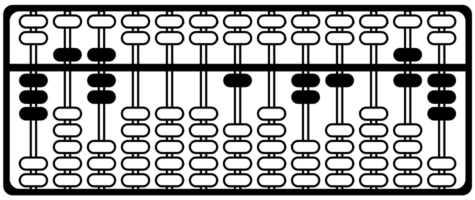


$56763 \div 357$

Comme $E\left(\dfrac{5}{4}\right) = 1$, posons 1 au quotient provisoire :

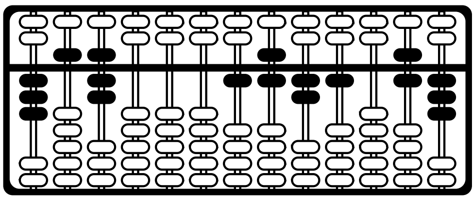


et retranchons successivement 1×7, 1×50 puis 1×300 de 567 ; il reste :

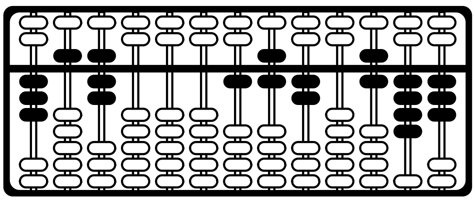


$567 - 1 \times 7 - 1 \times 50 - 1 \times 300 = 210$

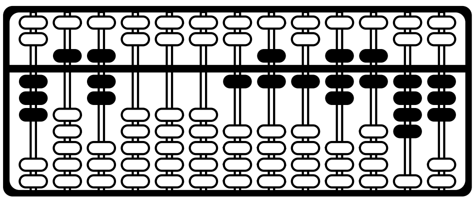
Comme $E\left(\dfrac{20}{3}\right) = 6$, posons 6 au quotient provisoire :



et retranchons successivement 6×7, 6×50 puis 6×300 de 2106 :

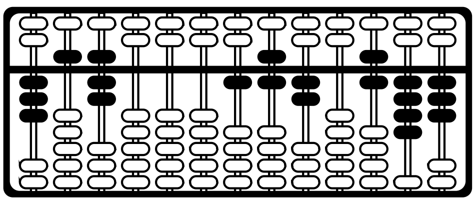


$2106 - 6 \times 7 = 2064$

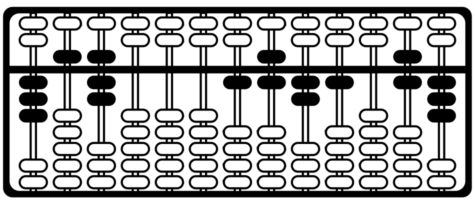


$2064 - 6 \times 50 = 1764$

Or, on ne peut soustraire 6×300 de 1764 ; le quotient provisoire est donc trop élevé.
Rajoutons alors les quantités retranchées :

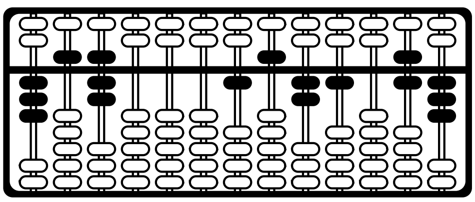


$1764 + 6 \times 50 = 2064$

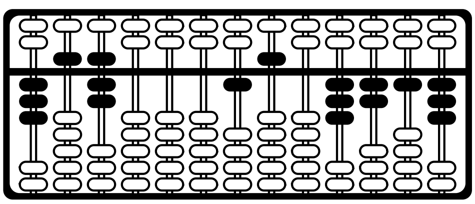


$2064 + 6 \times 7 = 2106$

Posons 5 au quotient provisoire au lieu de 6 :

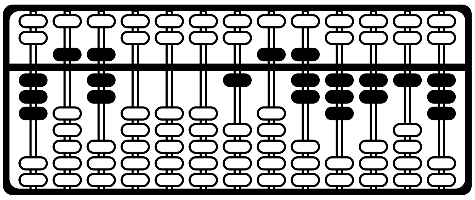


et retranchons successivement 5×7, 5×50 puis 5×300 de 2106 :

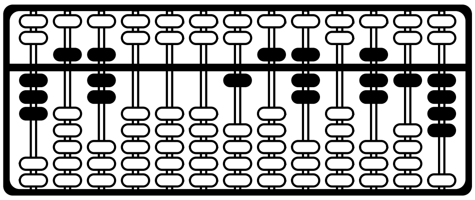


$2106 - 5 \times 7 - 5 \times 50 - 5 \times 300 = 321$

Comme $E\left(\dfrac{30}{4}\right) = 7$, posons 7 au quotient provisoire :

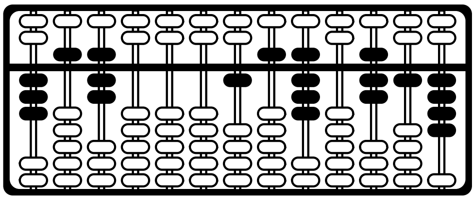


et retranchons successivement 7×7, 7×50 puis 7×300 de 3213 :

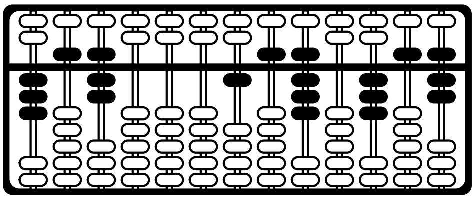


$3213 - 7 \times 7 - 7 \times 50 - 7 \times 300 = 714$

Le reste 714 est supérieur au diviseur, on peut donc augmenter le quotient provisoire de $E\left(\dfrac{7}{4}\right) = 1$:

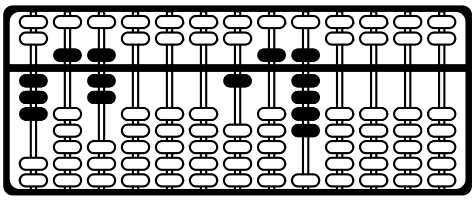


et retranchons successivement 1×7, 1×50 puis 1×300 de 714 :



$714 - 1 \times 7 - 1 \times 50 - 1 \times 300 = 357$

Le reste 357 est égal au diviseur, on peut donc augmenter de nouveau le quotient provisoire de 1 et retrancher 357 du reste :



$357 - 1 \times 357 = 0$

Ainsi $56763 \div 357 = 159$.

Ainsi qu'on a pu le voir, il semble préférable d'avoir un quotient approché par défaut. Dans ce cas, afin d'avoir un quotient approché qui ne soit pas par excès, on posera (avec les mêmes notations que précédemment) :

$$q = \begin{cases} E\left(\dfrac{10a}{b+1}\right) & \text{si} \quad a \leqslant b \\ E\left(\dfrac{a}{b+1}\right) & \text{si} \quad a > b \end{cases}$$

Le quotient provisoire ainsi obtenu sera éventuellement corrigé.

On se convainc aisément que la division requiert un entraînement intensif.
De plus, quelques cas particuliers peuvent s'avérer plus fastidieux ; il en est ainsi lorsque, par exemple, les premiers chiffres du dividende et du diviseur sont égaux.

L'extraction de la racine carrée et de la racine cubique nécessite la maîtrise de l'addition et de la soustraction. Simple en pratique, ces méthodes sont plus délicates à décrire et à expliquer.

VII. Racine carrée

Préliminaire mathématique

Considérons les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(s_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$u_n = 2n - 1 \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

Autrement dit u_n est le n-ième nombre impair et s_n est la somme des n premiers nombres impairs.
On a $s_n = n^2$.
En effet :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = 2\frac{n(n+1)}{2} - n = n^2$$

Ainsi la racine carrée de s_n est $\dfrac{u_n + 1}{2}$.

Extraction

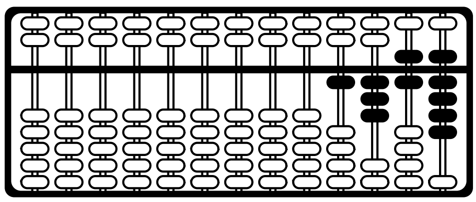
Soit N le nombre (entier) dont on veut extraire la racine carrée.
On découpe N en groupes de deux chiffres (à partir du chiffre des unités), $N_1, N_2, \ldots, N_k$, le groupe de gauche N_1 comportant un ou deux chiffres.
On notera :

$$N = \overline{N_1 N_2 \cdots N_k} = \sum_{i=1}^{k} N_i 100^{k-i}$$

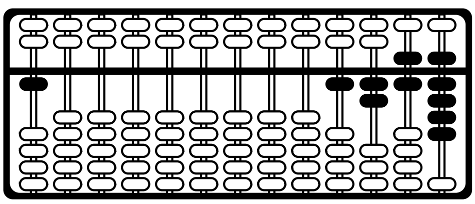
k correspond au nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $\sqrt{N}$.
La méthode générale d'extraction de la racine carrée de N est la suivante :

1. Poser N à droite du boulier.
2. Poser 1 à gauche du boulier et le soustraire du premier groupe N_1.
3. Ajouter 2 au nombre à gauche du boulier ; soustraire le résultat au reste du premier groupe.
Recommencer l'étape 3 tant que le nombre à gauche du boulier est inférieur au reste du premier groupe.
4. Ajouter 1 au nombre à gauche du boulier, multiplier le résultat par 10 puis ajouter 1 ; soustraire le résultat au nombre formé par le reste du premier groupe N'_1 et le deuxième groupe, à savoir $\overline{N'_1 N_2} = 100N'_1 + N_2$.
Recommencer alors les étapes 3 et 4 aux groupes suivants jusqu'à ce que les boules à droite du boulier soient toutes désactivées.
5. Ajouter 1 au nombre à gauche du boulier et diviser le résultat par 2.
Le nombre obtenu est la racine carrée de N.

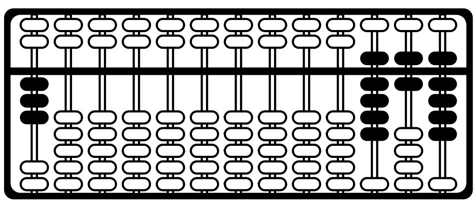
Exemple. — Extrayons la racine carrée de 1369 :



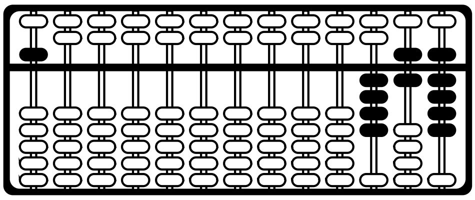
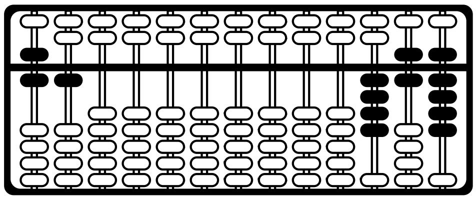
1369



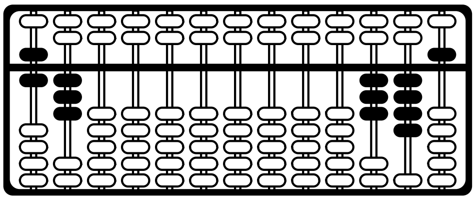
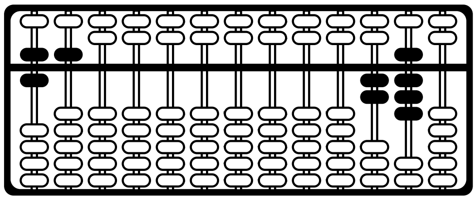
+1 $\qquad$ $13 - 1$



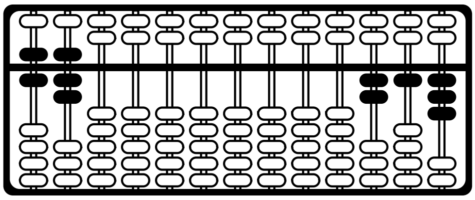
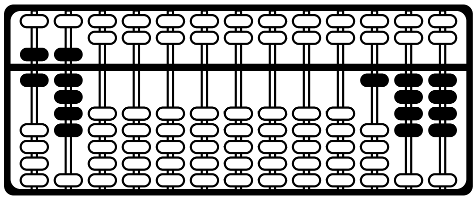
$1 + 2$ $\qquad$ $12 - 3$

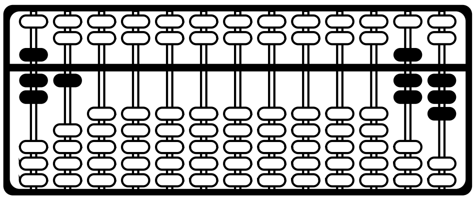
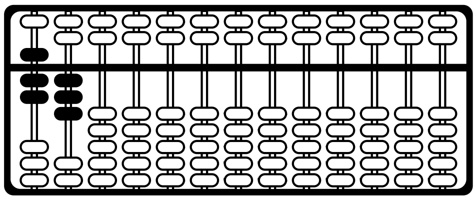
$3+2$ $9-5$ $(5+1)\times 10+1$ $469-61$

$61+2$ $408-63$ $63+2$ $345-65$

$65+2$ $280-67$ $67+2$ $213-69$

$69+2$ $144-71$ $71+2$ $73-73$

Ainsi, la racine carrée de 1369 est égale à $\dfrac{73+1}{2}=37$.

On peut synthétiser l'ensemble des opérations successives dans le tableau suivant :

Addictions effectuées à gauche du boulier		Soustractions effectuées à droite du boulier			
1$^{\text{er}}$groupe	2$^{\text{e}}$groupe	1$^{\text{er}}$groupe		2$^{\text{e}}$groupe	
1			1		
2			3		
2			5		
1	1			6	1
	2			6	3
	2			6	5
	2			6	7
	2			6	9
	2			7	1
	2			7	3
+7	3	−1	3	6	9

Exemple. — Extrayons la racine de 287296.

Additions effectuées à gauche du boulier			Soustractions effectuées à droite du boulier					
1^er^groupe	2^e^groupe	3^e^groupe	1^er^groupe		2^e^groupe		3^e^groupe	
1				1				
2				3				
2				5				
2				7				
2				9				
1	1			1	0	1		
	2			1	0	3		
	2			1	0	5		
	1	1			1	0	6	1
		2			1	0	6	3
		2			1	0	6	5
		2			1	0	6	7
		2			1	0	6	9
		2			1	0	7	1
+10	7	1	−2	8	7	2	9	6

Ainsi, la racine carrée de 2872896 est égale à $\dfrac{1071+1}{2} = 536$.

À l'étape 4 de la méthode décrite, la soustraction n'est pas nécessairement possible. Il convient alors de considérer les groupes suivants et d'adapter les opérations correspondantes :

> 4. Ajouter 1 au nombre à gauche du boulier, multiplier le résultat par 10^2 puis ajouter 1 ; soustraire le résultat au nombre formé par le reste du premier groupe N_1' et les deux groupes suivants, à savoir $\overline{N_1' N_2 N_3} = 100^2 N_1' + 100 N_2 + N_3$.

Ou encore :

> 4. Ajouter 1 au nombre à gauche du boulier, multiplier le résultat par 10^3 puis ajouter 1 ; soustraire le résultat au nombre formé par le reste du premier groupe N_1' et les trois groupes suivants, à savoir $\overline{N_1' N_2 N_3 N_4} = 100^3 N_1' + 100^2 N_2 + 100 N_3 + N_4$.

Exemple. — Extrayons la racine carrée de 25361296.

Additions effectuées à gauche du boulier				Soustractions effectuées à droite du boulier							
1^er^groupe	2^e^groupe	3^e^groupe	4^e^groupe	1^er^groupe		2^e^groupe		3^e^groupe		4^e^groupe	
1					1						
2					3						
2					5						
2					7						
2					9						
1		1				1	0	0	1		
		2				1	0	0	3		
		2				1	0	0	5		
		1	1				1	0	0	6	1
			2				1	0	0	6	3
			2				1	0	0	6	5
			2				1	0	0	6	7
			2				1	0	0	6	9
			2				1	0	0	7	1
+10	0	7	1	−2	5	3	6	1	2	9	6

Ainsi, la racine carrée de 25361296 est égale à $\dfrac{1071+1}{2} = 5036$.

VIII. Racine cubique

Préliminaire mathématique

Considérons les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}, (v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(s_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $u_1 = v_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, par :

$$u_{2n-1} = u_{2n-2} + 2, \qquad u_{2n} = u_{2n-1} + 1, \qquad v_{n+1} = v_n + u_{n+1}, \qquad s_n = \sum_{k=1}^{n} v_{2k-1}$$

Comme $u_1 = 1, u_2 = 2$ et $u_{n+2} = u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il vient, pour $n \geqslant 1$: $u_{2n-1} = 3n - 2$ et $u_{2n} = 3n - 1$.
On a : $v_{2n-1} = 3n(n-1) + 1$ et $v_{2n} = 3n(n+1) + 1$.
En effet, on a : $v_{2n-1} = v_{2n-2} + u_{2n-1} = v_{2n-3} + u_{2n-2} + u_{2n-1} = v_{2n-3} + 6(n-1)$. D'où :

$$v_{2n-1} - v_1 = \sum_{k=2}^{n} (v_{2k-1} - v_{2k-3}) = 6 \sum_{k=2}^{n} (k-1) = 3n(n-1)$$

Donc $v_{2n-1} = 3n(n-1) + 1$.
On prouve de même que $v_{2n} = 3n(n+1) + 1$.
On en déduit que $s_n = n^3$.
En effet :

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} v_{2k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (3k^2 - 3k + 1) \\ &= 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 3\frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= n^3 \end{aligned}$$

Ainsi, la racine cubique de s_n est $\dfrac{u_{2n-1} + 2}{3}$.

Extraction

Afin d'extraire la racine cubique d'un nombre, il faut disposer soit d'un boulier avec un grand nombre de tiges, soit de deux bouliers, cas dans lequel nous nous placerons.

Soit N le nombre (entier) dont on veut extraire la racine cubique.
On découpe N en groupes de trois chiffres (à partir du chiffre des unités), $N_1, N_2, \ldots, N_k$, le groupe de gauche N_1 comportant un, deux ou trois chiffres.
On notera :

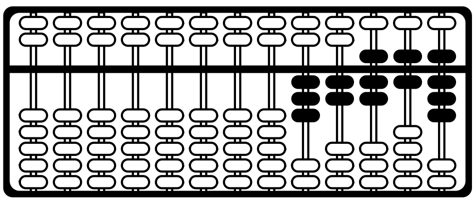
$$N = \overline{N_1 N_2 \cdots N_k} = \sum_{i=1}^{k} N_i 1000^{k-i}$$

k correspond au nombre de chiffres dans l'écriture décimale de $\sqrt[3]{N}$.

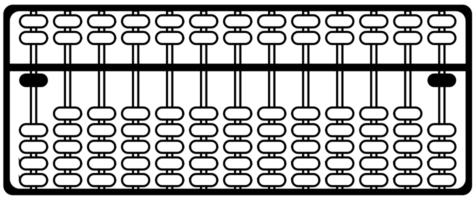
La méthode générale d'extraction de la racine cubique de N est la suivante :

1. Poser N à droite du second boulier.
2. Poser 1 à gauche et à droite du premier boulier et le soustraire du premier groupe N_1.
3. Ajouter 1 au nombre à gauche du premier boulier et ajouter le résultat au nombre à droite du premier boulier ; ensuite, ajouter 2 au nombre à gauche du premier boulier et ajouter le résultat au nombre à droite du premier boulier ; soustraire le résultat au reste du premier groupe.
   Recommencer l'étape 3 tant que le nombre à droite du premier boulier est inférieur au reste du premier groupe.
4. Ajouter 1 au nombre à gauche du premier boulier et ajouter le résultat au nombre à droite du premier boulier.
5. Ajouter 1 au nombre à gauche du premier boulier, multiplier le résultat par 10 puis ajouter 1 ; ajouter le résultat au nombre obtenu après avoir multiplié le nombre à droite du premier boulier par 100 ; soustraire le résultat au nombre formé par le reste du premier groupe N_1' et le deuxième groupe, à savoir $\overline{N_1' N_2} = 1000 N_1' + N_2$.
   Recommencer alors les étapes $3, 4$ et 5 aux groupes suivants jusqu'à ce que les boules du second boulier soient toutes désactivées.
6. Ajouter 2 au nombre à gauche du premier boulier et diviser le résultat par 3.
   Le nombre obtenu est la racine cubique de N.

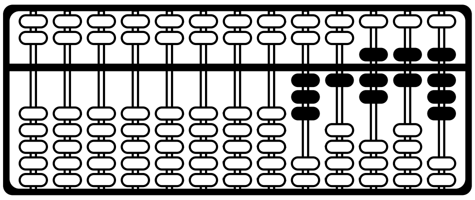
Exemple. — Extrayons la racine cubique de 32768 :



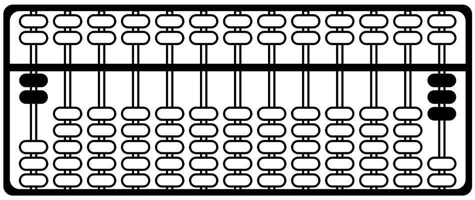
32768



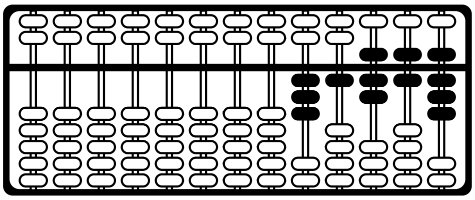
+1 +1

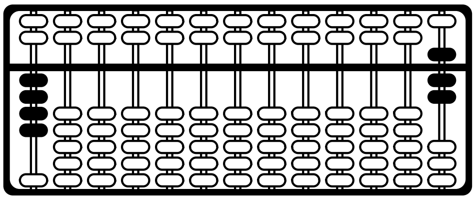


$32 - 1$

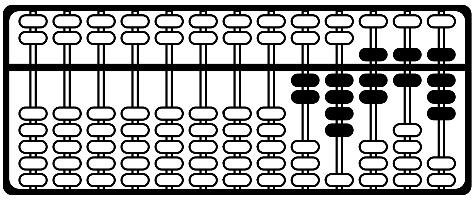


$1 + 1$ $1 + 2$

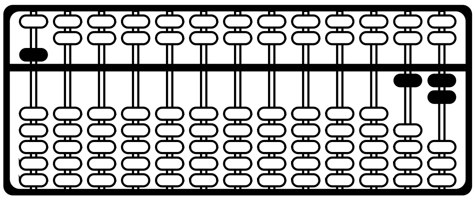




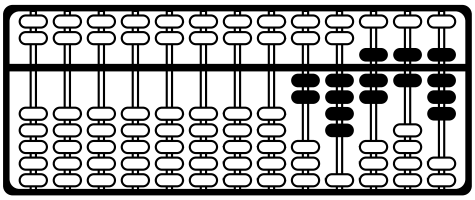
$2 + 2$ $3 + 4$

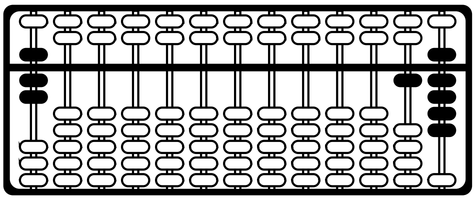


$31 - 7$

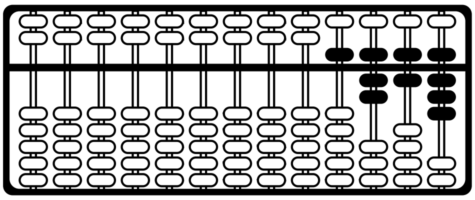


$4 + 1$ $7 + 5$

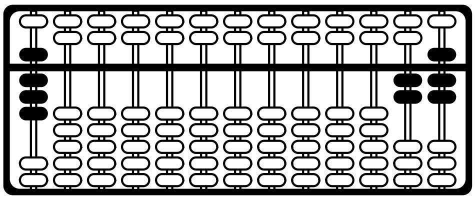




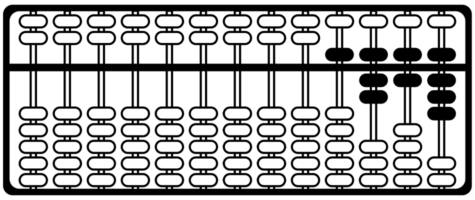
$5 + 2$ $12 + 7$

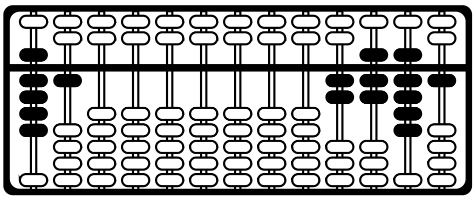


$24 - 19$

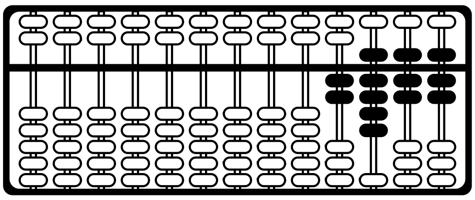


$7 + 1$ $19 + 8$

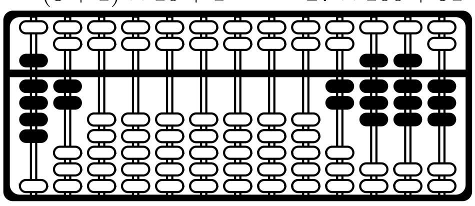




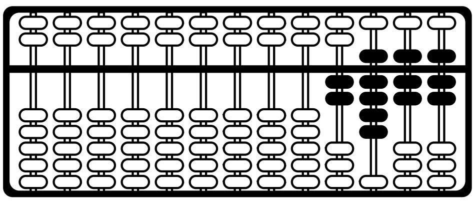
$(8 + 1) \times 10 + 1$ $27 \times 100 + 91$

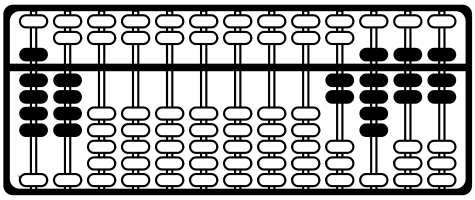


$5768 - 2791$

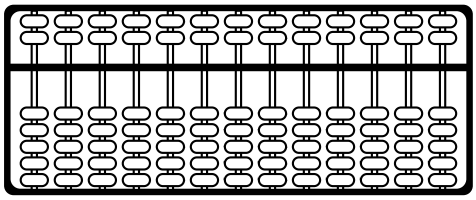


$91 + 1$ $2791 + 92$





92 + 2 2883 + 94



2977 − 2977

Ainsi, la racine cubique de 32768 est égale à $\dfrac{94+2}{3} = 32$.
On peut synthétiser l'ensemble des opérations successives dans le tableau suivant :

Addictions effectuées sur le premier boulier						Soustractions effectuées sur le second boulier					
A gauche		A droite									
1ergroupe	2^{e}groupe	1ergroupe		2^{e}groupe		1ergroupe			2^{e}groupe		
1			1					1			
1			2								
2			4					7			
1			5								
2			7				1	9			
1			8								
1	1			9	1			2	7	9	1
	1			9	2						
	2			9	4			2	9	7	7
+9	4						−3	2	7	6	8

À l'étape 5 de la méthode décrite, la soustraction n'est pas nécessairement possible. Il convient alors de considérer les groupes suivants et d'adapter les opérations correspondantes :

5. Ajouter 1 au nombre à gauche du premier boulier, multiplier le résultat par 10^2 puis ajouter 1 ; ajouter le résultat au nombre obtenu après avoir multiplié le nombre à droite du premier boulier par 100^2 ; soustraire le résultat au nombre formé par le reste du premier groupe N_1' et les deux groupes suivants, à savoir $\overline{N_1'N_2N_3} = 1000^2 N_1' + 1000 N_2 + N_3$.

Ou encore :

5. Ajouter 1 au nombre à gauche du premier boulier, multiplier le résultat par 10^3 puis ajouter 1 ; ajouter le résultat au nombre obtenu après avoir multiplié le nombre à droite du premier boulier par 100^3 ; soustraire le résultat au nombre formé par le reste du premier groupe N_1' et les trois groupes suivants, à savoir $\overline{N_1'N_2N_3N_4} = 1000^3 N_1' + 1000^2 N_2 + 1000 N_3 + N_4$.

Exemple. — Extrayons la racine cubique de 28934443.

Addictions effectuées sur le premier boulier									Soustractions effectuées sur le second boulier								
A gauche			A droite														
1ergroupe	2^{e}groupe	3^{e}groupe	1ergroupe		2^{e}groupe		3^{e}groupe		1ergroupe			2^{e}groupe			3^{e}groupe		
1				1							1						
1				2													
2				4							7						
1				5													
2				7						1	9						
1				8													
1		1				9	0	1				2	7	0	9	0	1
		1				9	0	2									
		2				9	0	4				2	7	2	7	0	7
		1				9	0	5									
		2				9	0	7				2	7	4	5	1	9
		1				9	0	8									
		2				9	1	0				2	7	6	3	3	7
		1				9	1	1									
		2				9	1	3				2	7	8	1	6	1
		1				9	1	4									
		2				9	1	6				2	7	9	9	9	1
		1				9	1	7									
		2				9	1	9				2	8	1	8	2	7
+9	1	9								−2	8	9	3	4	4	4	3

Ainsi, la racine cubique de 28934443 est égale à $\dfrac{919+2}{3} = 307$.